



# Trillingen van vloeren

## Ontwerprichtlijn



# Inhoudsopgave

<b>SAMENVATTING</b> .....	<b>2</b>
<b>1. INLEIDING</b> .....	<b>3</b>
1.1. ALGEMEEN .....	3
1.2. TOEPASSINGSGEBIED .....	3
1.3. REFERENTIES .....	4
1.4. DEFINITIES.....	5
1.5. VARIABELEN, EENHEDEN EN SYMBOLEN .....	7
<b>2. ONTWERP VAN VLOEREN TEGEN VLOERTRILLINGEN</b> .....	<b>8</b>
2.1. ONTWERP PROCEDURE.....	8
2.2. GERELATEERDE ONTWERPMETHODEN .....	8
2.2.1. <i>Handrekenmethode met behulp van metingen</i> .....	8
2.2.2. <i>Overdrachtsmethode</i> .....	9
2.2.3. <i>Modale superpositie</i> .....	9
<b>3. INDELING VAN TRILLINGSNIVEAUS</b> .....	<b>10</b>
3.1. TE BEOORDELEN GROOTHEID.....	10
3.2. BEOORDELINGSKLASSEN (VLOERKLASSEN).....	10
<b>4. HANDREKENMETHODE</b> .....	<b>12</b>
4.1. BEPALING VAN DE EIGENFREQUENTIE EN MODALE MASSA .....	12
4.1.1. <i>Eindige elementen analyse</i> .....	12
4.1.2. <i>Analytische formules</i> .....	12
4.2. BEPALING VAN DE DEMPING .....	12
4.3. BEPALING VAN DE VLOERKLASSE .....	13
4.3.1. <i>Systemen met meer dan een eigenfrequentie</i> .....	14
4.4. ES-RMS <sub>90</sub> GRAFIEKEN VOOR SYSTEMEN MET EEN VRIJHEIDSGRAAD.....	15
<b>A. BEREKENING VAN DE NATUURLIJKE FREQUENTIE EN MODALE MASSA VAN VLOEREN EN ANDERE CONSTRUCTIES</b> .....	<b>24</b>
A.1. NATUURLIJKE FREQUENTIE EN MODALE MASSA VOOR ISOTROPE PLATEN .....	24
A.2. NATUURLIJKE FREQUENTIE EN MODALE MASSA VOOR BALKEN .....	27
A.3. NATUURLIJKE FREQUENTIE EN MODALE MASSA VOOR ORTHOTROPE PLATEN .....	27
A.4. EIGEN GEWICHT BENADERING VOOR DE NATUURLIJKE FREQUENTIE.....	28
A.5. DUNKERLEY BENADERING VOOR DE NATUURLIJK FREQUENTIE .....	29
A.6. BENADERING VOOR DE MODALE MASSA .....	30

## Samenvatting

Moderne, lichtgewicht vloeren en vloeren met grote overspanningen kunnen gevoelig zijn voor trillingen bij normale gebruik. Deze richtlijn presenteert een methode waarmee vloeren eenvoudig voor dit soort trillingen kunnen worden ontworpen.

Deze richtlijn richt zich op vloeren van gebouwen met een kantoor en/of woon functie die mogelijk door normaal lopende mensen geëxciteerd kunnen worden en die hierdoor hinder voor andere gebruikers kunnen veroorzaken.

Deze richtlijn gaat samen met een achtergrond document die alternatieve en meer algemene methodes beschrijft voor de bepaling van de responsie van vloeren op door mensen veroorzaakte dynamische belastingen.

De theoretische methodes die zowel in richtlijn als achtergrond documentatie zijn beschreven zijn ontwikkeld binnen het Research Fund voor Coal and Steel Project "Vibration of Floors". Deze documentatie is geschreven in opdracht van de RFCS binnen het kader van het project "HIVOSS".

Regels voor de bepaling van relevante dynamische vloer karakteristieken en rekenvoorbeelden zijn in de bijlage van dit documenten te vinden.

# 1. Inleiding

## 1.1. Algemeen

Vloeren worden ontworpen voor zowel uiterstegrenstoestand als bruikbaarheidsgrenstoestand:

- Eisen met betrekking tot de uiterstegrenstoestand betreffen sterkte en stabiliteit van de constructie;
- Eisen met betrekking tot bruikbaarheidsgrenstoestand betreffen onder andere trillingen en dus zijn hoofdzakelijk gerelateerd aan de stijfheid, massa, demping en belastingsmechanismes.

Voor slanke vloerconstructies in staal of composiet wordt het ontwerp meestal bepaald door eisen met betrekking tot bruikbaarheid.

Deze richtlijn is gericht op:

- Specificatie van dragelijk trillingsterkte door gebruik van beoordelingsklassen en
- Voorspelling van de vloerresponsie op loopbelasting in relatie tot de gebruiksfunctie van het gebouw.

Voor de voorspelling van de vloerresponsie dienen een aantal dynamische karakteristieken bepaald worden. Deze karakteristieken en vereenvoudigde methodes om ze te bepalen worden kort beschreven.

## 1.2. Toepassingsgebied

Deze richtlijn geeft aanwijzingen voor de voorspelling en beoordeling van trillingen van vloeren. De procedure die hierin is beschreven behelst een vereenvoudigde methode voor de controle van vloerontwerpen ten aanzien van looptrillingen. De richtlijn richt zich op vereenvoudigde methodes en aanbevelingen in relatie het verdragen van trillingen als gevolg van normale menselijke activiteiten, met name lopen. Trillingen door machines of door verkeer vallen buiten de scope van deze richtlijn.

De richtlijn mag niet worden toegepast voor voetgangersbruggen of andere constructies waarvan noch het gedrag noch het gebruik vergeleken kan worden met die van een vloer in een gebouw.

### 1.3. Referenties

- [1] European Commission – Technical Steel Research: *Generalisation of criteria for vloer vibrations voor industrial, office, residential and public building and gymnastic halls*, RFCS Report EUR 21972 EN, ISBN 92-79-01705-5, 2006, <http://europa.eu.int>
- [2] Hugo Bachmann, Walter Ammann. *Vibration of Structures induced by Man and Machines* IABSE-AIPC-IVBH, Zürich 1987, ISBN 3-85748-052-X
- [3] Waarts, P. *Trillingen van vloeren door lopen: Richtlijn voor het voorspellen, meten en beoordelen*. SBR, September 2005.
- [4] Smith, A.L., Hicks, S.J., Devine, P.J. *Design of Floors for Vibrations: A New Approach*. SCI Publication P354, Ascot, 2007.
- [5] ISO 2631. *Mechanical Vibration and Shock, Evaluation of human exposure to whole-body vibration*. International Organization for Standardization.
- [6] ISO 10371. *Bases for design of structures – Serviceability of buildings and walkways against vibrations*. International Organization for Standardization.

## 1.4. Definities

<p>Demping <math>D</math></p>	<p>Demping is een effect, inherent aan een systeem of specifiek toegevoegd voor dat doel, dat leidt tot een vermindering van de trilling van een oscillerend systeem in de tijd. Demping is energiedissipatie van een trillend systeem met tijd of afstand. Voor constructies bestaat de totale demping uit:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Materiaal en structurele demping</li> <li>• Demping door meubilair en afbouw</li> <li>• Geometrische demping</li> </ul>
<p>Modale massa, <math>M_{\text{mod}} =</math> gegeneraliseerde massa</p>	<p>Een systeem met meerdere vrijheidsgraden kan tot een combinatie van meerdere enkelvrijheidsgraad (SDOF) systemen worden gereduceerd met overeenkomende eigenfrequenties.</p> $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$ <p>waarin <math>f</math> is de natuurlijke frequentie, uitgedrukt in Hz</p> <p><math>k^*</math> is de modale stijfheid</p> <p><math>m^*</math> is de modale massa.</p> <p>De modale massa kan worden gezien als de geactiveerde massa in een bepaalde trilvorm.</p>

<p>Natuurlijke frequentie, <math>f</math> (eigenfrequentie)</p>	<p>De natuurlijke frequentie is de frequentie van vrije trilling van een systeem. Voor een systeem met meerdere vrijheidsgraden, zijn de natuurlijke frequenties de frequenties van de trilvormen. Het aantal natuurlijke frequenties en bijbehorende trilvormen is afhankelijk van het aantal graden van vrijheid. Zij worden over het algemeen gesorteerd op de hoeveelheid energie die door de trilling vrijkomt; de eerste natuurlijke frequentie heeft het laagste energieniveau en heeft de grootste kans te worden geactiveerd.</p> <p>De vergelijking voor de natuurlijke frequentie voor één enkele vrijheidsgraad (SDOF) systeem is:</p> $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$ <p>waarin <math>K</math> is de stijfheid <math>M</math> is de massa.</p> <p>De frequentie <math>F</math> is gelijk aan één gedeeld door de trillingstijd <math>T</math> (<math>f = 1 / T</math>).</p>
<p>ES-RMS<sub>90</sub></p>	<p>90% bovengrens van de een stap RMS waarde van de snelheid voor een significante stap.</p> <p>ES: Een stap</p> <p>RMS: Wortel van de gemiddelde effectieve waarde in het kwadraat van de snelheid <math>v</math>:</p> $v_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} \approx \frac{v_{Peak}}{\sqrt{2}}$ <p>waar: <math>T</math> is de duur van de stap.</p>

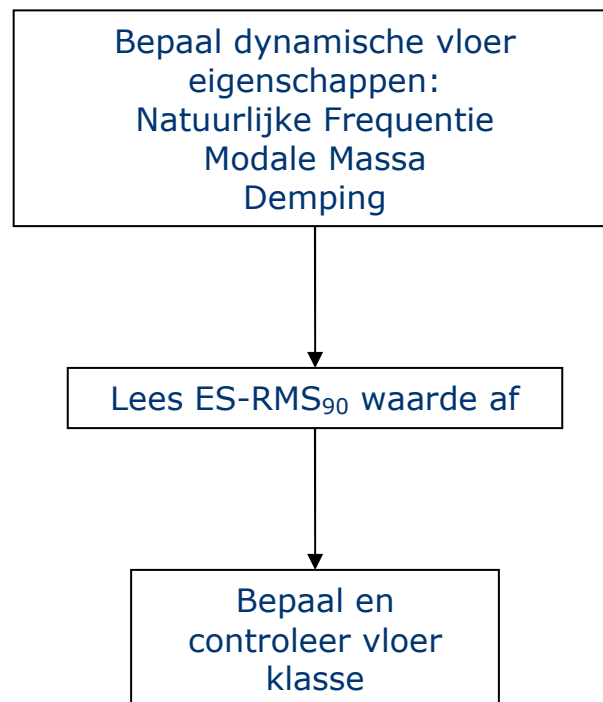
## 1.5. Variabelen, eenheden en symbolen

$a$	<i>versnelling</i>	$[m/s^2]$	
$B$	<i>breedte</i>	$[m]$	
$f, f_i$	<i>natuurlijke frequentie</i>	$[Hz]$	
$\delta(x,y)$	<i>Verplaatsing bij locatie <math>x,y</math></i>	$[m]$	
$D$	<i>Demping (% van kritische demping)</i>	$[-]$	
$D_1$	<i>Structureel en materiaal demping</i>	$[-]$	
$D_2$	<i>Demping door meubilair</i>	$[-]$	
$D_3$	<i>Demping door afbouw</i>	$[-]$	
$l$	<i>lengte</i>	$[m]$	
$K, k$	<i>stijfheid</i>	$[N/m]$	
$M_{mod}$	<i>Modale massa</i>	$[kg]$	
$M_{total}$	<i>Total massa</i>	$[kg]$	
$ES-RMS$	<i>Een stap RMS waarde van de effectieve snelheid</i>	$[-]$	
$ES-RMS_{90}$	<i>90 percentiel van ES-RMS waarden</i>	$[-]$	
$T$	<i>periode (van een trilling)</i>	$[s]$	
$t$	<i>time</i>	$[s]$	
$p$	<i>verdeelde belasting (per eenheid van lengte of oppervlakte)</i>	$[kN/m]$ $[kN/m^2]$	of
$\delta$	<i>vervorming</i>	$[m]$	
$\mu$	<i>verdeelde massa per eenheid van lengte of oppervlakte</i>	$[kg/m]$ $[kg/m^2]$	of

## 2. Ontwerp van vloeren tegen vloertrillingen

### 2.1. Ontwerp procedure

De in deze richtlijn beschreven procedure komt overeen met een vereenvoudigde methode voor de controle van een vloer ontwerp voor looptrillingen. De eerste stap van deze procedure is om de dynamische karakteristieken ofwel de modale parameters van de vloer te bepalen. Deze parameters zijn de modale massa, de natuurlijke frequentie en demping. Met behulp van deze parameters en een set grafieken kan de ES-RMS<sub>90</sub> waarde worden afgelezen. Vervolgens wordt deze waarde beoordeeld volgens de beoordelingsklasse die aanbevolen wordt voor de gegeven gebruiksfunctie van de vloer. De drie stappen in deze procedure worden gegeven in Figuur 1. Deze methode wordt aangeduid als handrekenmethode en wordt verder beschreven in hoofdstuk 4.



**Figuur 1:** Ontwerp procedure.

### 2.2. Gerelateerde ontwerpmethoden

#### 2.2.1. Handrekenmethode met behulp van metingen

De handrekenmethode kan ook worden toegepast in die gevallen waarbij de vloer eigenschappen aan de hand van metingen bepaald zijn. Voor een beschrijving van hoe men parameters experimenteel kan bepalen wordt verwezen naar [1] en [3].

### 2.2.2. Overdrachtsmethode

In de overdrachtsmethode worden de vloercharacteristieken beschreven in termen van een overdrachtsfunctie in plaats van modale parameters.

Vervolgens wordt, door middel van een statistische analyse de ES-RMS<sub>90</sub> waarde van de desbetreffende vloer bepaald. De methode wordt in meer detail beschreven in [1] and [3].

De handrekenmethode, welk een vereenvoudigde versie van de overdrachtsmethode betreft, is gebaseerd op de klassieke overdrachtsfunctie voor een systeem met een enkele vrijheidsgraad. De probabilistische analyse om de ES-RMS<sub>90</sub> waarde te bepalen is vooraf uitgevoerd.

De overdrachtsmethode kan worden toegepast voor die gevallen waar de vloerresponsie is met behulp van eindige elementen analyses of metingen bepaald.

### 2.2.3. Modale superpositie

Twee analysemethodes, die op modale superpositie gebaseerd zijn, worden beschreven in de richtlijn door de Steel Construction Institute, [4].

In de algemene methode wordt een eindige elementen analyse gebruikt om de eigenschappen van de vloer voor een aantal trillingsvormen te bepalen. Vervolgens worden ontwerp loopbelastingen toegepast om de responsie te bepalen in termen van versnelling. De vereenvoudigde methode is gebaseerd op een parametrische studie die gebruik maakt van deze algemene methode en bestaat uit analytische formules. In tegenstelling tot de handrekenmethode, is het modale superpositie methode deterministisch en zijn de resultaten direct vergelijkbaar met grenswaarden in de internationale standaarden in [5] and [6]. In deze methode kan de invloed van scheiding tussen de veroorzaker van looptrillingen en de ontvanger beschouwd worden. Meer informatie over deze methode wordt in het achtergrond document gegeven.

### 3. Indeling van trillingsniveaus

#### 3.1. Te beoordelen grootheid

De perceptie van trilling door mensen en de daarmee gerelateerde hinder die men ervaart is afhankelijk van verschillende aspecten. De meest belangrijk zijn:

- De richting van de trilling. In deze richtlijn worden allen verticale trillingen beschouwd.
- Postuur (staand, liggend of zittend).
- De huidige activiteit van een bewoner is bepalend voor zijn perceptie van de trilling. Bijvoorbeeld, mensen die in een fabriek werken zullen trillingen op een andere manier waarnemen dan mensen die werken op een kantoor.
- Verder, kunnen de leeftijd en de gezondheid van mensen invloed hebben op de beleving van trillingshinder.

Dus de perceptie van trillingen verschilt van mens tot mens en kan alleen zodanig worden beoordeeld dat aan de comfortverwachtingen van de meerderheid kan worden voldaan.

Opgemerkt wordt dat de trillingsniveaus die in deze richtlijn worden beschouwd alleen relevant zijn voor het comfort van bewoners. Deze niveaus zijn niet relevant voor constructieve veiligheid.


De te beoordelen grootheid is de 90% bovengrens van de RMS waarde van de gewogen vloerrespons bepaald over één stap, de  $ES-RMS_{90}$ . De  $ES-RMS_{90}$  is dimensieloos.

#### 3.2. Beoordelingsklassen (vloerklassen)

In de onderstaande tabel worden trillingen ingedeeld in zes vloerklassen (A t/m F). In deze tabel worden ook de aanbevolen te hanteren klassen gegeven ten aanzien van de gebruiksfunctie.

**Tabel 1: Indeling van trillingssterkte in klassen en aanbevolen niveaus ten aanzien van gebruiksfunctie**

Klasse	ES-RMS <sub>90</sub>		Gebruiksfunctie													
	Ondergrens	Bovengrens	Kritische werkruimte	Gezondheid	Onderwijs	Woonfunctie	Kantoor	Bijeenkomstfunctie	Winkel	Hotel	Gevangenis	Industrie	Sport			
A	0.0	0.1														
B	0.1	0.2														
C	0.2	0.8														
D	0.8	3.2														
E	3.2	12.8														
F	12.8	51.2														



■ Aanbevolen  
■ Kritisch  
■ Niet aanbevolen

Grenswaarden van de trillingsterkte worden ook gegeven in internationaal standaard ISO 10137[6], welk als referentie in de Eurocodes gebruikt wordt. Deze grenswaarden worden in Tabel 2, gegeven naast de equivalente ES-RMS<sub>90</sub> waarde.

**Tabel 2: Grenswaarden volgens ISO 10137 voor continu trilling**

Place	Time	Vermenigvuldigingsfactor	ES-RMS <sub>90</sub> equivalent
Kritische werkruimte (e.g. ziekenhuis operatiekamer, precisie laboratoria, etc.)	Dag	1	0.1
	Nacht	1	0.1
Woonfunctie (e.g. flatgebouwen, huizen, ziekenhuizen)	Dag	2 to 4	0.2 to 0.4
	Nacht	1.4	0.14
Kantoor met open ruimte	Dag	2	0.2
	Nacht	2	0.2
Algemeen kantoorfunctie en scholen	Dag	4	0.4
	Nacht	4	0.4
Fabrieken	Dag	8	0.8
	Nacht	8	0.8

Opgemerkt wordt dat grenswaarden in Tabel 2 nodeloos streng zijn en dat uit proeven op een aantal gebruikersgroepen blijkt dat grenswaarden in Tabel 1 meer geschikt zijn (zie [1]).

## 4. Handrekenmethode

In de handrekenmethode wordt aangenomen dat de dynamische responsie van de vloer geschematiseerd kan worden als die van systeem met een enkele vrijheidsgraad. De natuurlijke frequentie, modale massa en demping kunnen bepaald worden zoals aangegeven in dit hoofdstuk. Zoals eerder beschreven in paragraaf 2.2.1, kunnen de modale parameters bepaald worden ook door middel van metingen. Omdat deze richtlijn gericht op nieuwbouw worden metingen hier niet beschouwd.

### 4.1. Bepaling van de eigenfrequentie en modale massa

In de praktijk, kunnen vloer eigenschappen of met behulp van eenvoudige berekeningen (analytische formules) of door middel van eindige elementen analyse bepaald worden.

Bij het bepalen van de vloer eigenschappen, moet een realistische aandeel van de veranderlijke belasting worden meegenomen in de massa van het vloer. Richtwaarden zijn 10% tot 20% van de veranderlijke belasting. Voor zeer lichte vloeren wordt aanbevolen om de massa van een persoon ook te nemen in de modale massa van de vloer. Een minimale representatieve waarde voor de meewerkende massa van een persoon is 30 kg.

#### 4.1.1. Eindige elementen analyse

Verschillende eindige elementen programma's kunnen dynamische berekeningen uitvoeren en hebben modules om eigenfrequenties te bepalen. Veel programma's kunnen ook automatisch bij een frequentie analyse de modale massa uitrekenen.

Opgemerkt wordt dat eindige elementen modellen voor de bruikbaarheidgrensstoestand (SLS) en voor de uiterstegrenstoestand (ULS) kunnen wezenlijk verschillen.

Een typische voorbeeld is die van de selectie van de randvoorwaarde van de vloer. Een verbinding die in ULS als een volledige scharnier mag worden beschouwd kan zich in SLS als een volledig moment vaste verbinding gedragen.

Voor beton, moet de dynamische elasticiteitsmodulus 10% hoger worden genomen dan de statische tangentiële elasticiteitsmodulus  $E_{cm}$ .

#### 4.1.2. Analytische formules

Voor handberekeningen, geeft bijlage A formules voor de bepaling van eigenfrequenties en modale massa van isotropische en orthotropische platen en balken.

### 4.2. Bepaling van de demping

Demping heeft een grote invloed op het trilgedrag van de vloer. Waarden voor de dempingverhouding kunnen worden bepaald aan de hand van Tabel

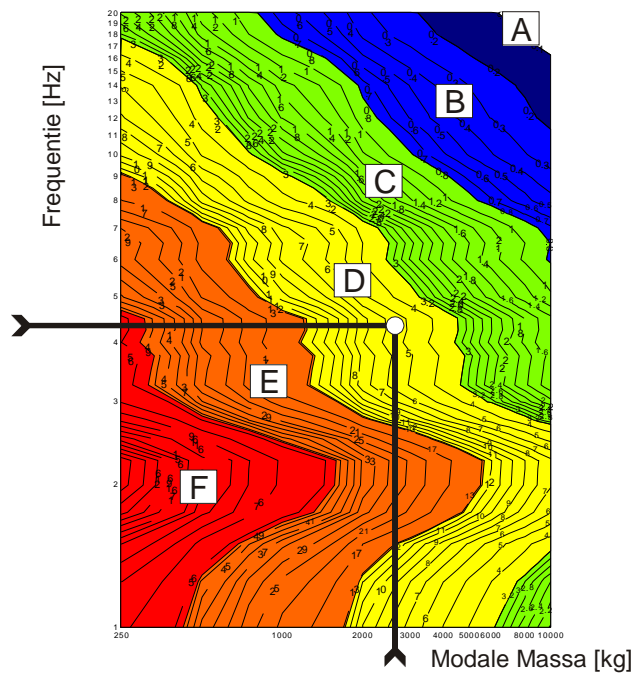
3 voor verschillende materialen, meubilair en afbouw. Het totale (systeem) demping  $D$  wordt verkregen door de waarden  $D_1$  t/m  $D_3$  op te tellen.

**Tabel 3: Bepaling van de demping**

Type	Demping (% van kritische demping)
<b>Materiaal demping <math>D_1</math></b>	
Hout	6%
Beton	2%
Staal	1%
Staal-beton	1%
<b>Demping door meubilair <math>D_2</math></b>	
Traditionele kantoor voor 1 t/m 3 personen met scheidingswanden	2%
Papierloos kantoor	0%
Kantoor met open ruimtes	1%
Bibliotheek	1%
Woningen	1%
Scholen	0%
Sportzalen	0%
<b>Demping door afbouw <math>D_3</math></b>	
Plafond onder vloer	1%
Zwevende dekvloer	1%
<b>Totale Demping <math>D = D_1 + D_2 + D_3</math></b>	

#### 4.3. Bepaling van de vloerklasse

Als de modale massa en eigenfrequentie en demping bepaald zijn, kan zowel  $ES-RMS_{90}$  waarde als de bijbehorende vloerklasse afgelezen worden met behulp van de diagrammen in sectie 4.4.



**Figuur 2: Toepassing van grafieken in handrekenmethode**

Het diagram wordt toegepast door op de x-as de modale massa en op y-as de eigenfrequentie op te zoeken. De ES-RMS<sub>90</sub> waarden en bijbehorende vloerklasse wordt afgelezen bij de kruising van de lijnen vanuit de twee gezochte punten op de x en y assen (zie Figuur 2).

#### 4.3.1. Systemen met meer dan een eigenfrequentie

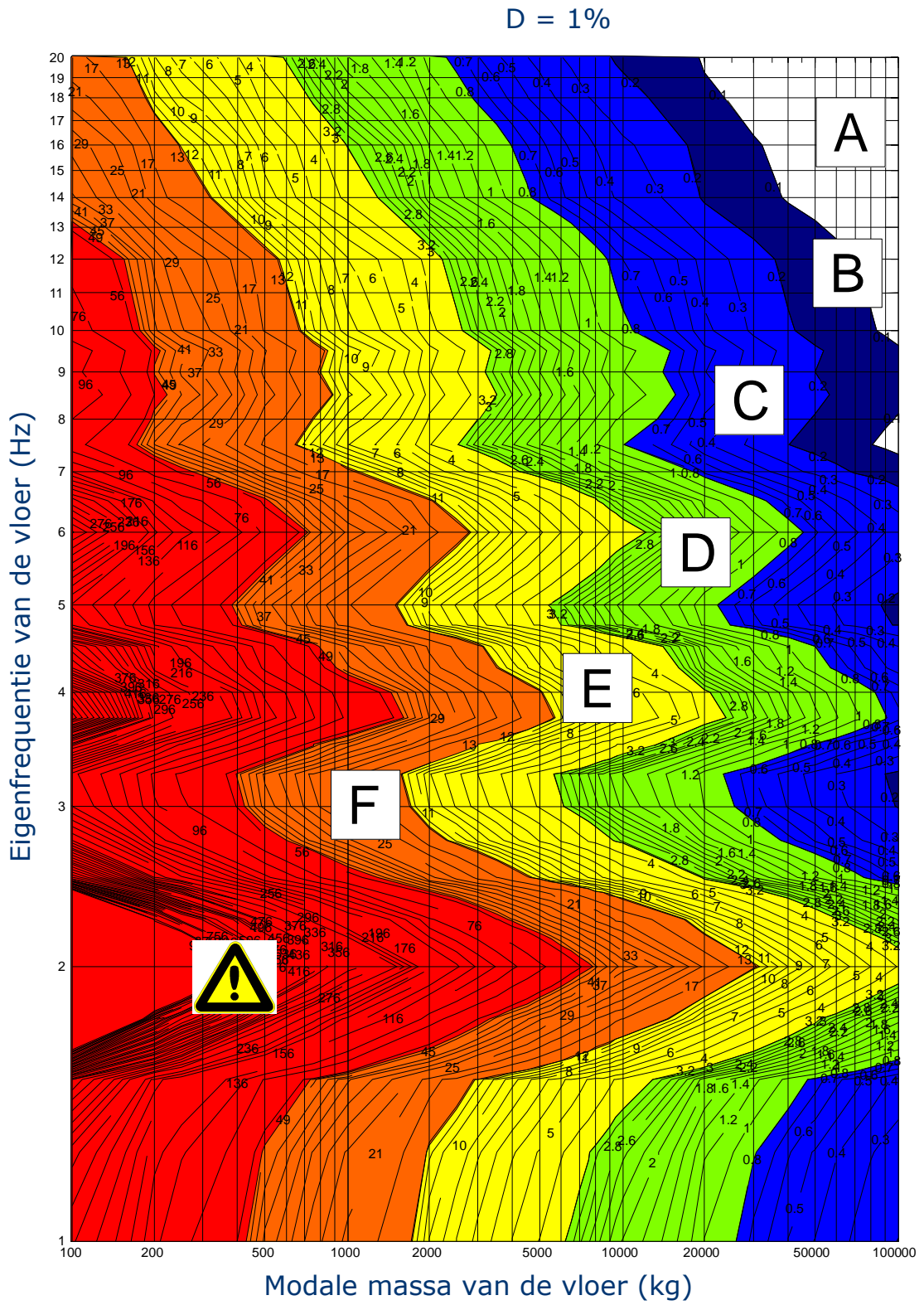
In bepaalde gevallen, is de vloerresponsie gekenmerkt door meer dan een natuurlijke frequentie. In deze gevallen, moet de ES-RMS<sub>90</sub> waarde bepaald worden als een combinatie van ES-RMS<sub>90</sub> waarden verkregen voor elke trilvorm. De procedure is als volgt:

- a) Bepaal de eigenfrequenties.
- b) Bepaal de modale massa en demping voor elke eigenfrequentie.
- c) Bepaal de bijbehorende ES-RMS<sub>90</sub> waarde voor elke eigenfrequentie.
- d) Benader de totale (of gecombineerde) ES-RMS<sub>90</sub> waarde met behulp van:

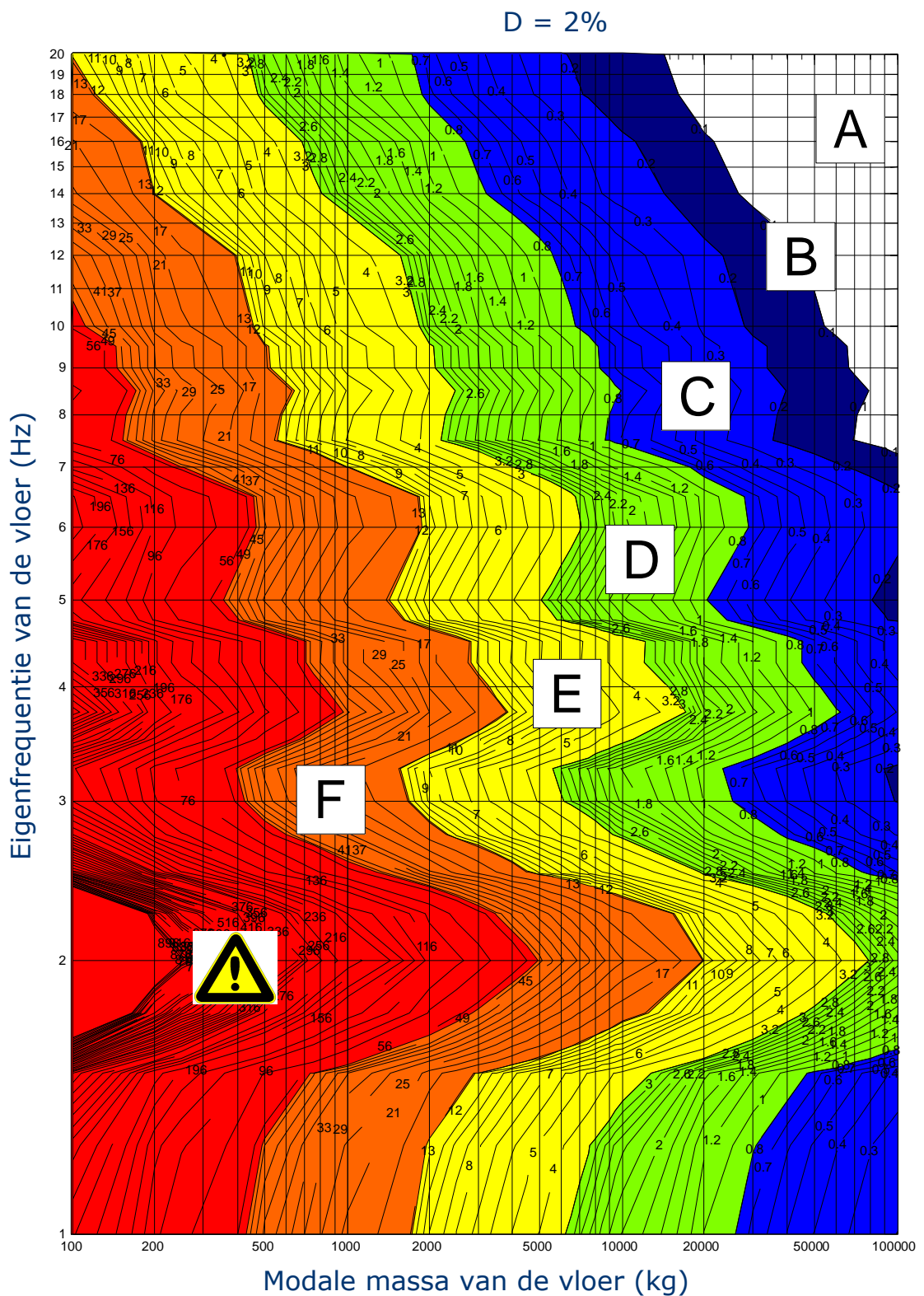
$$OS - RMS_{90} = \sqrt{\sum_i OS - RMS_{90;i}^2}$$

- e) Lees de bijbehorende vloerklasse af vanuit Tabel 1.

4.4. ES-RMS<sub>90</sub> grafieken voor systemen met een vrijheidsgraad

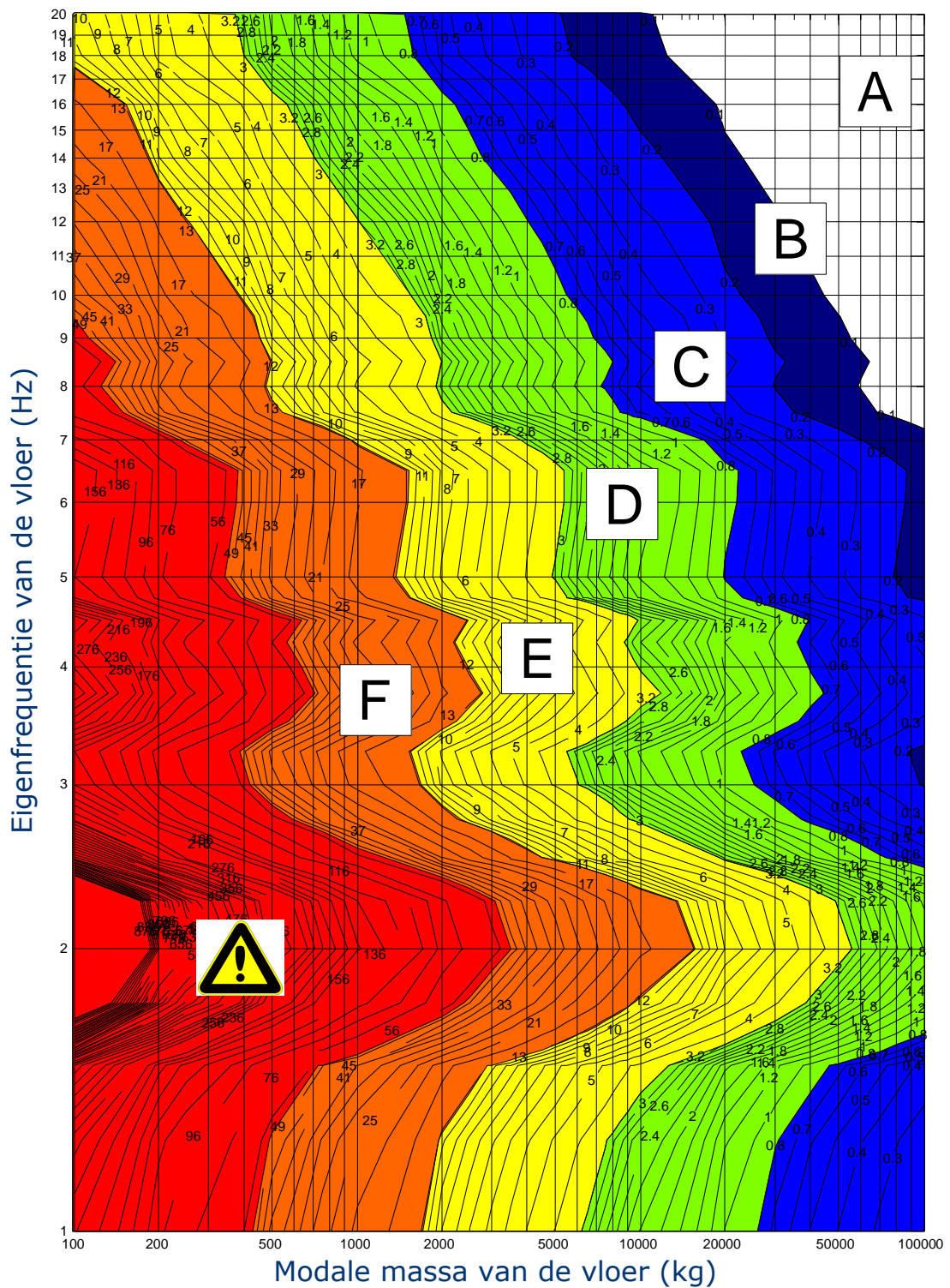


Figuur 3: ES-RMS<sub>90</sub> voor 1% Damping

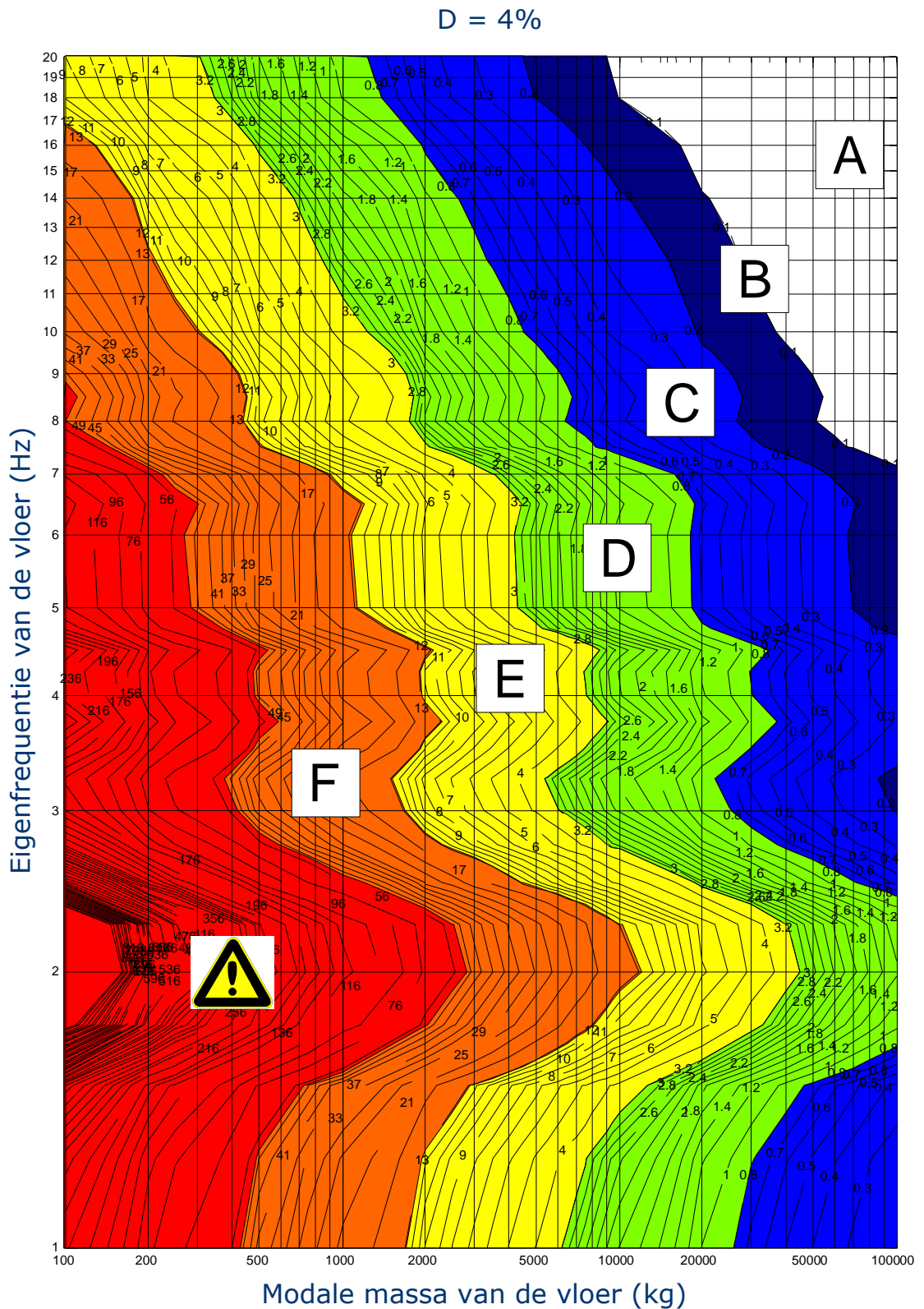


**Figuur 4: ES-RMS<sub>90</sub> voor 2% Damping**

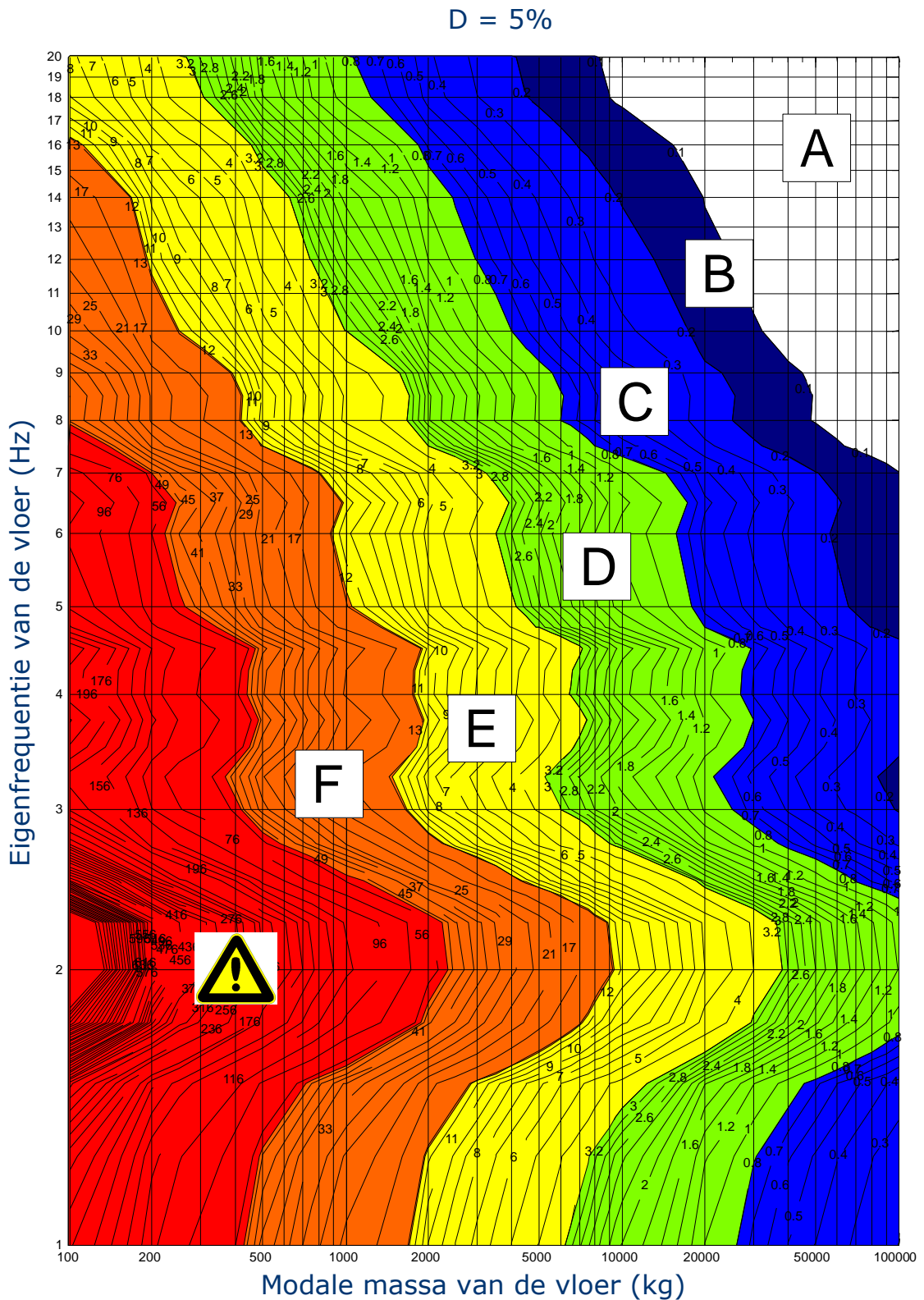
D = 3%



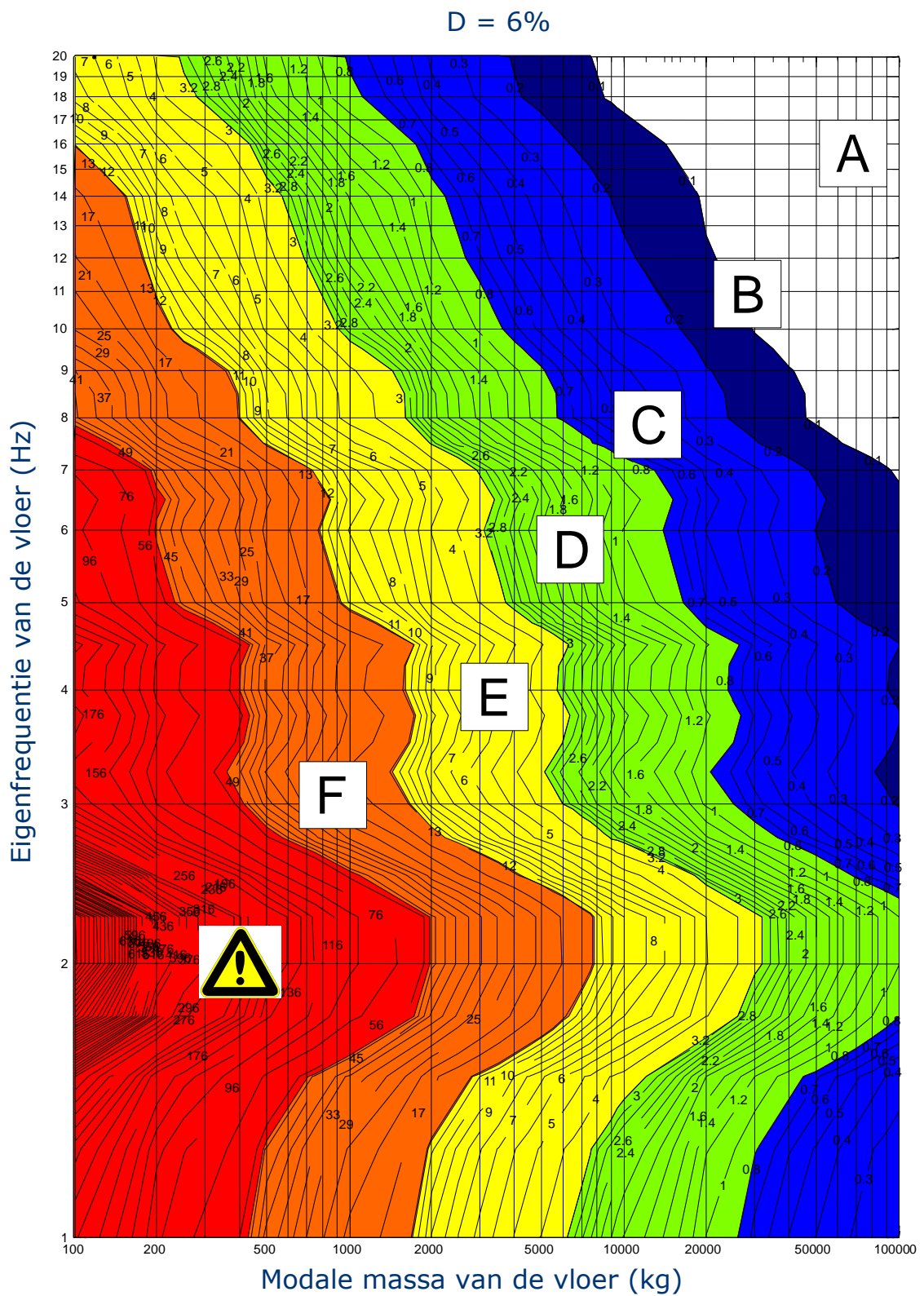
Figuur 5: ES-RMS<sub>90</sub> voor 3% Demping



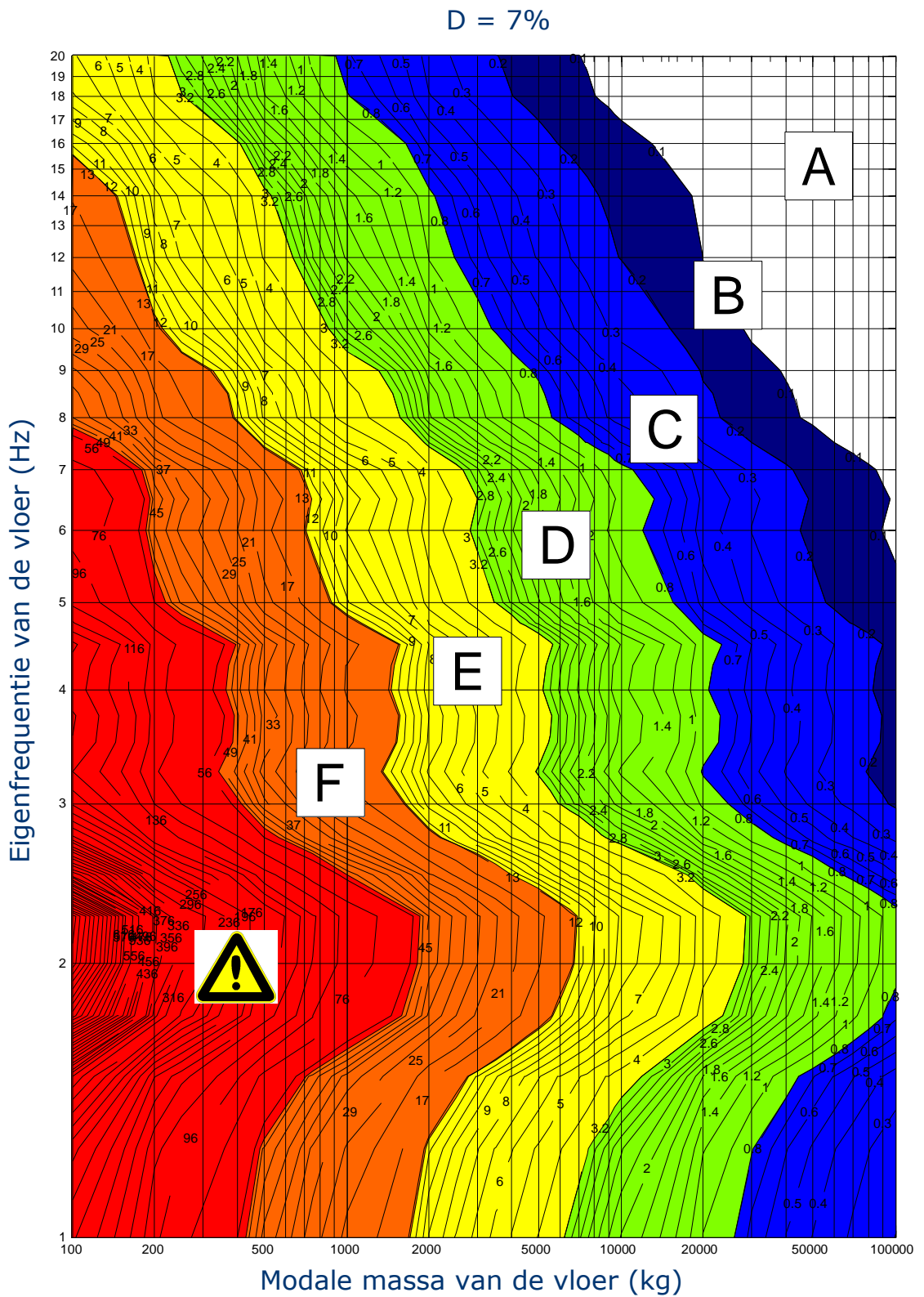
**Figuur 6: ES-RMS<sub>90</sub> voor 4% Damping**



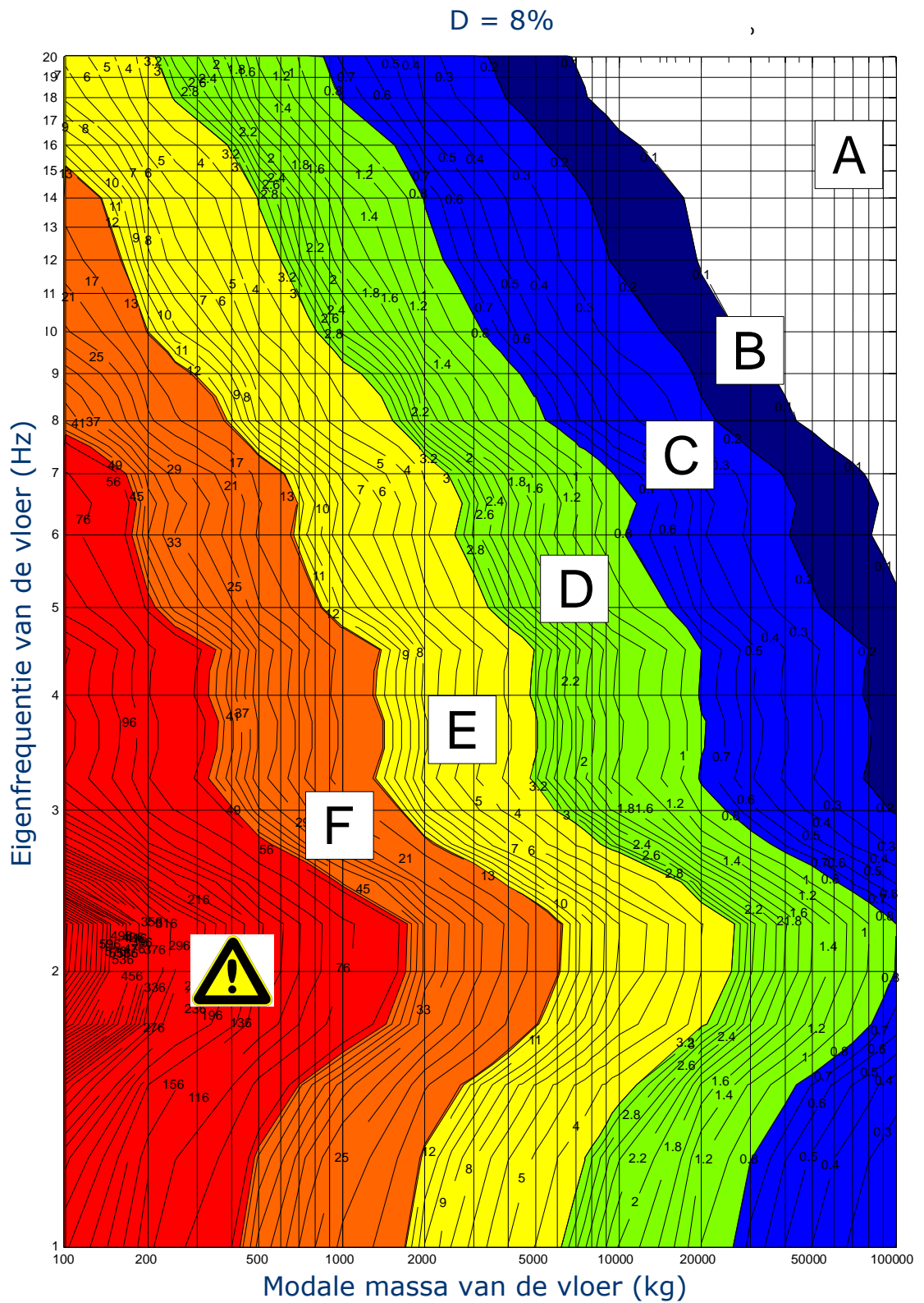
**Figuur 7: ES-RMS<sub>90</sub> voor 5% Damping**



**Figuur 8: ES-RMS<sub>90</sub> voor 6% Damping**

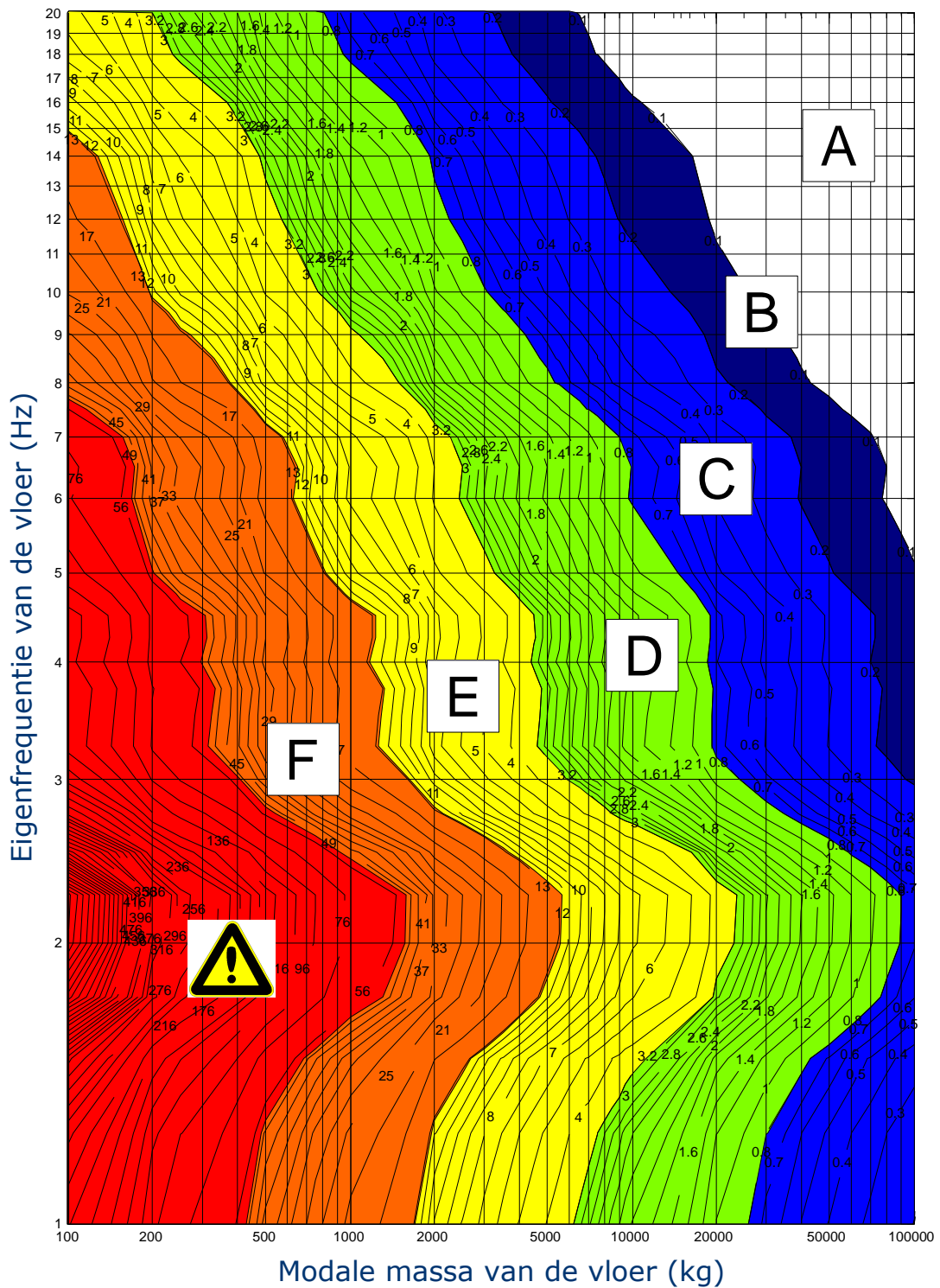


**Figuur 9: ES-RMS<sub>90</sub> voor 7% Damping**



**Figuur 10: ES-RMS<sub>90</sub> voor 8% Damping**

D = 9%




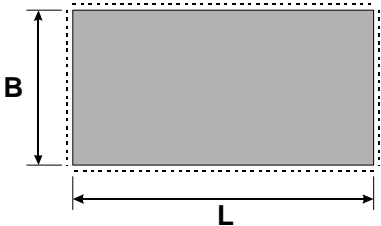
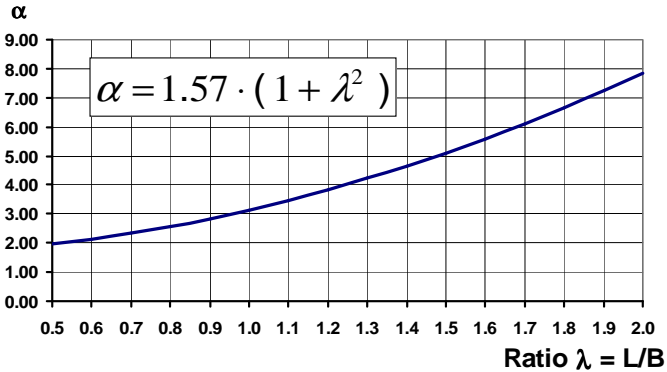
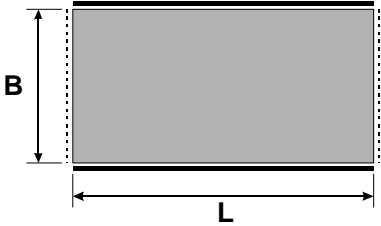
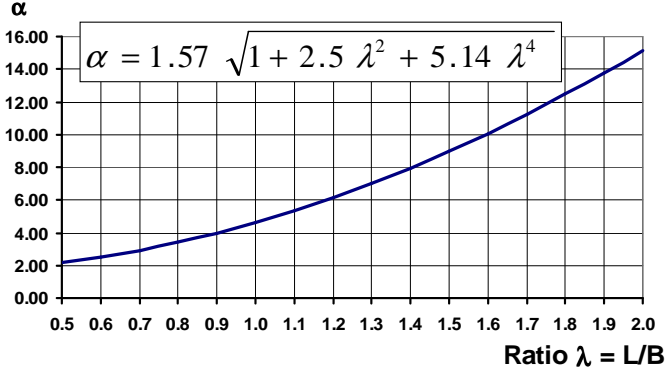
Figuur 11: ES-RMS<sub>90</sub> voor 9% Damping




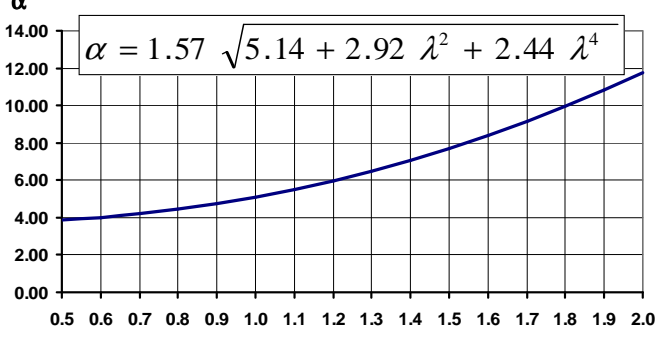

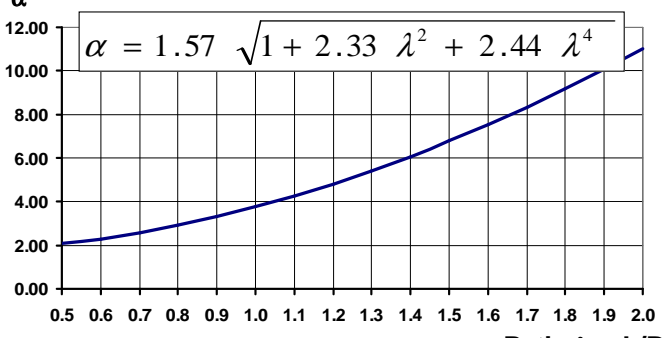
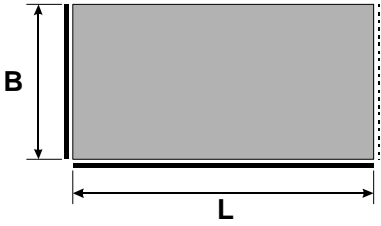
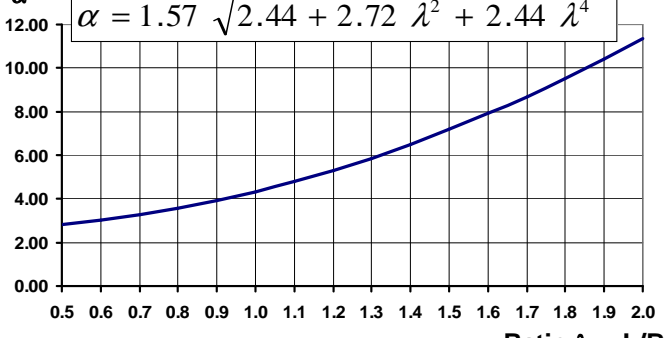
## A. Berekening van de natuurlijke frequentie en modale massa van vloeren en andere constructies



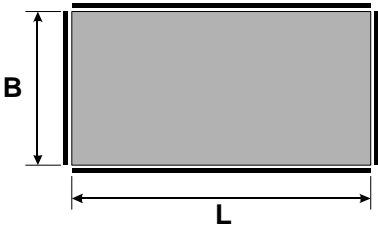
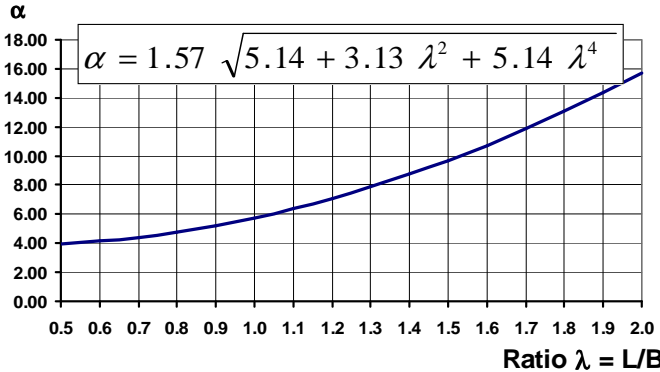
### A.1. Natuurlijke frequentie en modale massa voor isotrope platen

De onderstaande tabel geeft formules voor de bepaling van de eerste natuurlijke frequentie (volgens [2]) en van de modale massa voor verschillende oplegcondities.

De gegeven formules zijn geldig voor die situaties waarbij geen zijdelings verplaatsing ontstaat aan de randen van de plaat.

<b>Oplegcondities:</b> 	<b>Frequentie ; Modale massa</b> $f = \frac{\alpha}{L^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12 \cdot \mu (1 - \nu^2)}} ; M_{\text{mod}} = \beta \cdot M_{\text{tot}}$
	 <p style="text-align: center;"><math>\beta \approx 0,25</math> voor alle <math>\lambda</math></p>
	 <p style="text-align: center;"><math>\beta \approx 0,20</math> voor alle <math>\lambda</math></p>

<p><b>Oplegcondities:</b></p> <p> ingeklemd     vrij opgelegd</p>	<p><b>Frequentie ; Modale massa</b></p> $f = \frac{\alpha}{L^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12 \cdot \mu (1 - \nu^2)}} ; M_{\text{mod}} = \beta \cdot M_{\text{tot}}$
	<p><math>\alpha</math></p>  <p><math>\alpha = 1.57 \sqrt{5.14 + 2.92 \lambda^2 + 2.44 \lambda^4}</math></p> <p>Ratio <math>\lambda = L/B</math></p> <p><math>\beta \approx 0,18</math> voor alle <math>\lambda</math></p>
	<p><math>\alpha</math></p>  <p><math>\alpha = 1.57 \sqrt{1 + 2.33 \lambda^2 + 2.44 \lambda^4}</math></p> <p>Ratio <math>\lambda = L/B</math></p> <p><math>\beta \approx 0,22</math> voor alle <math>\lambda</math></p>
	<p><math>\alpha</math></p>  <p><math>\alpha = 1.57 \sqrt{2.44 + 2.72 \lambda^2 + 2.44 \lambda^4}</math></p> <p>Ratio <math>\lambda = L/B</math></p> <p><math>\beta \approx 0,21</math> voor alle <math>\lambda</math></p>

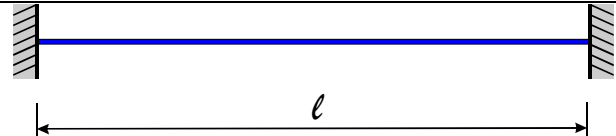
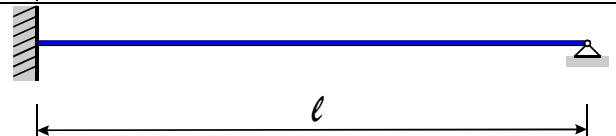
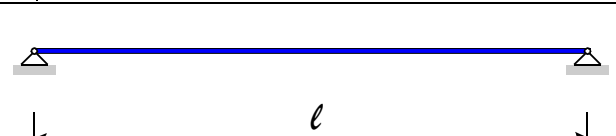
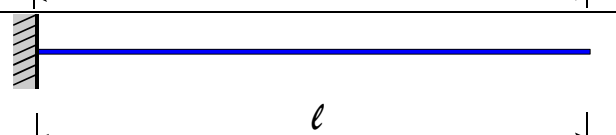
<p><b>Oplegcondities:</b></p> <p> ingeklemd     vrij opgelegd</p>	<p><b>Frequentie ; Modale massa</b></p> $f = \frac{\alpha}{L^2} \sqrt{\frac{E t^3}{12 \cdot \mu (1 - \nu^2)}} ; M_{\text{mod}} = \beta \cdot M_{\text{tot}}$
	 <p style="text-align: center;"><math>\beta \approx 0,17</math> voor alle <math>\lambda</math></p>
	<p>E    Elasticiteitsmodulus in N/m<sup>2</sup></p> <p>t    Dikte van de plaat in m</p> <p><math>\mu</math>    Massa van de vloer incl. meubilair en afbouw in kg/m<sup>2</sup></p> <p><math>\nu</math>    Poisson verhouding</p> <p><math>M_{\text{tot}}</math>    Totale massa van de vloer incl. afbouw en representatieve variabele belasting in kg</p>

## A.2. Natuurlijke frequentie en modale massa voor balken

De eerste eigenfrequentie van een balk voor verschillende oplegcondities kan bepaald worden met de formules in Tabel 4 met:

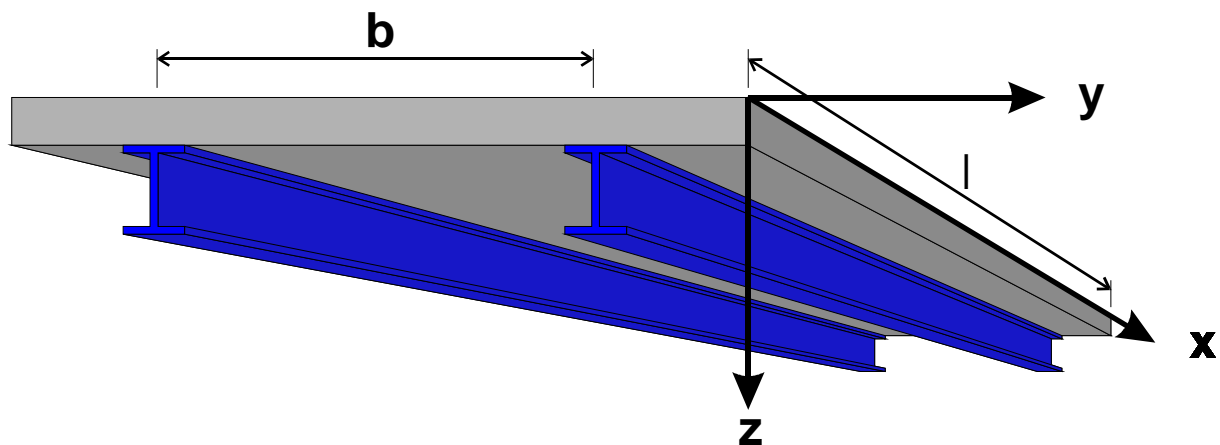
- E Elasticiteitsmodulus [N/m<sup>2</sup>]  
 I Traagheidsmoment [m<sup>4</sup>]  
 μ verdeelde massa [kg/m]  
 ℓ Lengte van de balk

**Tabel 4: Eerste eigenfrequentie en modale massa voor balken**

Oplegcondities	Natuurlijke Frequentie	Modale massa
	$f = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.37\mu l^4}}$	$M_{\text{mod}} = 0,41 \mu l$
	$f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.2\mu l^4}}$	$M_{\text{mod}} = 0,45 \mu l$
	$f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.49\mu l^4}}$	$M_{\text{mod}} = 0,5 \mu l$
	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.24\mu l^4}}$	$M_{\text{mod}} = 0,64 \mu l$

## A.3. Natuurlijke frequentie en modale massa voor orthotrope platen

Orthotrope vloeren zoals composiet vloeren met balken in de longitudinale richting en een betonnen platen in transversale richting hebben verschillende stijfheden in de lengte en breedte richting ( $EI_y > EI_x$ ). Een voorbeeld hiervan is in Figuur A.1 gegeven.



**Figuur A.1: Dimensions and axis of an orthotropic plate**

De eigenfrequenties van een rechthoekige orthotrope vloer die aan de randen scharnierend is opgelegd, kunnen worden beschreven met onderstaande vergelijking:

$$f_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI_y}{\mu l^4}} \sqrt{1 + \left[ 2 \left( \frac{b}{l} \right)^2 + \left( \frac{b}{l} \right)^4 \right] \frac{EI_x}{EI_y}}$$

waar:

- $\mu$  is de massa per  $m^2$  in  $kg/m^2$ ,
- $l$  is de lengte van de vloer in m (in x-richting),
- $b$  is de breedte van de vloer in m (in y- richting),
- $E$  is de elasticiteitsmodulus in  $N/m^2$ ,
- $I_x$  is de traagheidsmoment voor buiging om de x-as in  $m^4$ ,
- $I_y$  is de traagheidsmoment voor buiging om de y-as in  $m^4$ .

#### A.4. Eigen gewicht benadering voor de natuurlijke frequentie

De eigenfrequentie van een constructie kan benard worden met behulp van de doorbuiging als gevolg van zijn eigen gewicht. Deze benadering kan heel handig zijn als men de doorbuiging,  $\delta_{\max}$  al heeft uitgerekend, bijv. in een eindige elementen analyse.

Dit methode maakt gebruik van de formule:  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$

De stijfheid wordt benadert met behulp van:

$$K = \frac{M \cdot g}{\frac{3}{4} \delta_{\max}},$$

waar

$M$  is de totale massa van het trillende system,

$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  is de zwaartekracht versnelling

$\frac{3}{4} \delta_{\max}$  is de gemiddelde doorbuiging.

De benadering voor de natuurlijke frequentie wordt dan gegeven door:

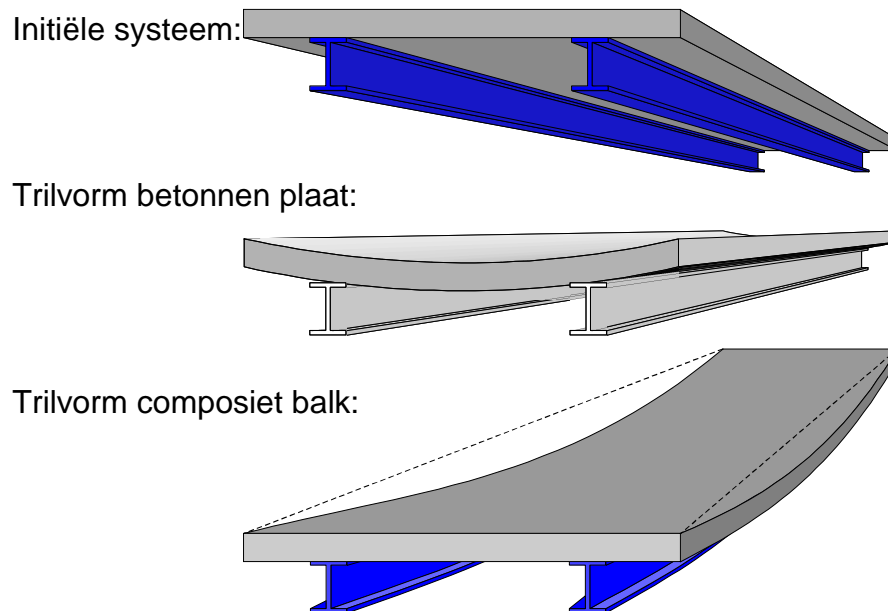
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 \cdot g}{3 \cdot \delta_{\max}}} = \frac{18}{\sqrt{\delta_{\max} [\text{mm}]}}$$

#### A.5. Dunkerley benadering voor de natuurlijk frequentie

De Dunkerley benadering kan toegepast worden bij complexe trilvormen die zich lenen voor ontbinding in enkele elementaire trilvormen waarvan de eigenfrequentie bepaald kan worden met behulp van de formules in A.1, A.2 en A.3.

Figuur 12 geeft een voorbeeld van een composiet vloer met twee eenvoudig opgelegde balken en vrije randen.

De verwachte trilvorm wordt in twee onafhankelijke trilvormen gedeeld. Beide trilvormen hebben hun eigen natuurlijke frequentie ( $f_1$  voor de trilling van de betonnen plaat en  $f_2$  voor de composiet balk).



**Figuur 12: Voorbeeld van ontbinding van de trilvorm**

Volgens Dunkerley is de resulterende natuurlijke frequentie  $f$  van het totale systeem:

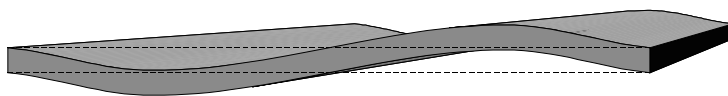
$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_3^2} + \dots$$

### A.6. Benadering voor de modale massa

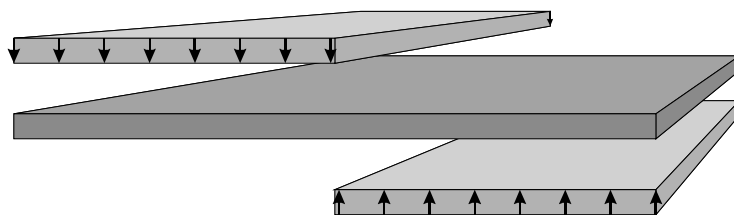
Onder de modale massa wordt de massa van de vloer verstaan die wordt geactiveerd als de vloer onder een specifieke trilvorm beweegt. Elke trilvorm heeft zijn specifieke natuurlijke frequentie en modale massa.

Om de modale massa te kunnen bepalen moet eerst de genormaliseerde trilvorm worden bepaald. De trilvorm kan niet met rekenformules worden bepaald en bij sommige eindige elementen pakketten is het niet mogelijk de modale massa op te vragen. In deze gevallen kan de trilvorm bepaald worden door middel van een benadering. Hierbij wordt een belasting op de constructie opgelegd zodanig dat een doorbuiging ontstaat die de verwachte trilvorm benadert.

**Expected mode shape:**



**Application of loads:**



**Figuur 13: Toepassing van belasting om trilvorm te benaderen (voorbeeld)**

Indien de trilvorm met behulp van een genormaliseerde functie  $\delta(x,y)$  (d.w.z.  $|\delta(x,y)|_{\max.} = 1,0$ ) benaderd kan worden, kan de modale massa met behulp van de volgende formule verkregen worden:

$$M_{\text{mod}} = \mu \int_F \delta^2(x,y) dF$$

waar

$\mu$  is de verdeelde massa per eenheid van lengte of oppervlakte;  
 $\delta(x,y)$  is de verticale verplaatsing op locatie  $x,y$

Indien de trilvorm is met behulp van eindige elementen analyse bepaald dan:

$$M_{\text{mod}} = \sum_{\text{Nodes } i} \delta_i^2 \times dM_i$$

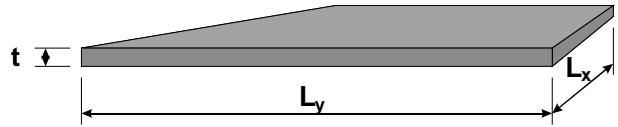
waar

$f_i$  is de verticale genormaliseerde verplaatsing in knoop  $i$   
 $dM_i$  is de massa van de vloer rondom knoop  $i$

Indien de functie  $\delta(x,y)$  de exacte oplossing voor de trilvorm is, dan is levert de formule hierboven de exacte modale massa.

Hieronder worden een aantal voorbeelden gegeven voor de bepaling van de modale massa door middel van rekenformules.

**Voorbeeld 1: Op alle randen eenvoudig opgelegde plaat,  $L_x \sim L_y$**



- Benadering voor eerste trilvorm:

$$\delta(x,y) = \sin\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) \times \sin\left(\frac{\pi \times y}{l_y}\right), \quad |\delta(x,y)|_{\max.} = 1,0$$

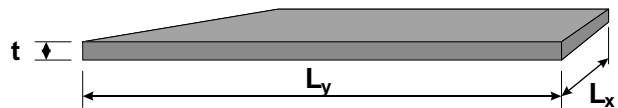
- Verdeelde massa

$$\mu = \frac{M_{total}}{l_x \times l_y}$$

- Modale massa

$$M_{mod} = \mu \times \int_F \delta^2(x,y) \times dF = \frac{M_{total}}{l_x \times l_y} \times \int_{l_y} \int_{l_x} \sin^2\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) \times \sin^2\left(\frac{\pi \times y}{l_y}\right) \times dx \times dy = \frac{M_{total}}{4}$$

**Voorbeeld 2: Op alle randen eenvoudig plaat,  $L_x \ll L_y$**



1. Benadering voor eerste trilvorm:

2.  $0 \leq y \leq \frac{l_x}{2}$  and  $l_y - \frac{l_x}{2} \leq y \leq l_y$ :

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) \times \sin\left(\frac{\pi \times y}{l_y}\right), \quad |f(x,y)|_{\max.} = 1,0$$

3.  $\frac{l_x}{2} \leq y \leq l_y - \frac{l_x}{2}$ :

$$\delta(x,y) = \sin\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) \times 1,0, \quad |\delta(x,y)|_{\max.} = 1,0$$

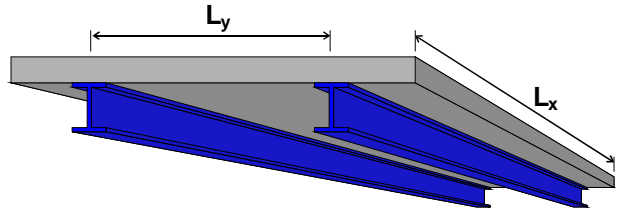
- Verdeelde massa

$$\mu = \frac{M_{total}}{l_x \times l_y}$$

- Modale massa

$$\begin{aligned} M_{mod} &= \mu \times \int_F \delta^2(x,y) \times dF \\ &= \frac{M_{total}}{l_x \times l_y} \times \left[ 2 \times \int_0^{l_x} \int_0^{y=l_2} \sin^2\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) \times \sin^2\left(\frac{\pi \times y}{l_y}\right) \times dx \times dy + \int_0^{l_x} \int_0^{l_2 - \frac{l_x}{2}} \sin^2\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) \times dx \times dy \right] \\ &= \frac{M_{total}}{4} \times \left( 2 - \frac{l_x}{l_y} \right) \end{aligned}$$

**Voorbeeld 3: Plaat op stalen liggers. Liggers eenvoudig opgelegd**



- Benadering voor eerste trilvorm:

$$\delta(x,y) = \frac{\delta_x}{\bar{\delta}} \times \sin\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) + \frac{\delta_y}{\bar{\delta}} \times \sin\left(\frac{\pi \times y}{l_y}\right), \quad |\delta(x,y)|_{\max.} = 1,0$$

Met

$\delta_x$  = Doorbuiging van de ligger

$\delta_y$  = Doorbuiging van de plaat exclusief doorbuiging van de liggers

$$\delta = \delta_x + \delta_y$$

- Verdeelde massa

$$\mu = \frac{M_{total}}{l_x \times l_y}$$

- Modale massa

$$M_{mod} = \mu \times \int_F \delta^2(x,y) \times dF = \frac{M_{total}}{l_x \times l_y} \times \int_{l_x} \int_{l_y} \left[ \frac{\delta_x}{\bar{\delta}} \times \sin\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) + \frac{\delta_y}{\bar{\delta}} \times \sin\left(\frac{\pi \times y}{l_y}\right) \right]^2 \times dx \times dy$$

$$= M_{total} \times \left[ \frac{\delta_x^2 + \delta_y^2}{2\bar{\delta}^2} + \frac{8}{\pi^2} \times \frac{\delta_x \times \delta_y}{\bar{\delta}^2} \right]$$





